ارتعاشات اجباری غیرخطی صفحهٔ مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک مستطیلی‌شکل براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبهٔ سوم*

رامین منتشلو[۱] علیرضا شوشتری[۲]

چکیده در این مقاله ارتعاشات اجباری عرضی غیرخطی تحت نیروی تحریک هارمونیک جانبی یک صفحهٔ مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک مستطیلی‌شکل ساخته شده از پیزوالکتریک $BaTiO_3$ و مگنتواستریکتیو $CoFe_2O_4$، با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده بررسی شده است. تغییرات خواص از پایین به بالا فرض شده است، یعنی سطح بالای ورق غنی از پیزوالکتریک است، در حالی که سطح پایین ورق غنی از مگنتواستریکتیو است و خواص مواد در جهت ضخامت مطابق قانون توزیع توانی درجه‌بندی شده است. معادلات حرکت براساس تئوری برشی مرتبه سوم ردِی به‌دست آمده‌اند. همچنین معادلات ماکسول در حالت الکترواستاتیک و مگنتواستاتیک برای مدل‌سازی رفتار الکتریکی و مغناطیسی به‌کار برده شده‌اند. سپس معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی به‌دست آمده با استفاده از روش گلرکین به پنج معادلهٔ دیفرانسیل معمولی غیرخطی کوپل شده تبدیل شده‌اند. این معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی به یک معادلهٔ دیفرانسیل که شامل ترم‌های غیرخطی سفتی و اینرسی و ترم‌های غیرخطی مرتبه دو و سه است کاهش یافته‌اند. برای حل معادلهٔ به‌دست آمده، از تئوری اغتشاشات استفاده شده است و سپس نتایج به‌دست آمده برای فرکانس طبیعی خطی با نتایج موجود برای ورق‌های همسانگرد و ورق‌های پیزوالاستیک همسانگرد مقایسه شده‌اند و مطابقت خوبی میان نتایج این پژوهش و نتایجی که قبلاً منتشر شده‌اند مشاهده گردیده‌است. در تحلیل ارتعاشات اجباری، تشدیدهای اولیه، سوپرهارمونیک مطالعه شده‌است و معادلهٔ پاسخ فرکانسی آن به‌دست آمده است. همچنین باتوجه به اهمیت تشدید اولیه، پایداری آن نیز بررسی شده است. نیروی تحریک خارجی در این حالت، نیروی تحریک مکانیکی با دامنهٔ ثابت و به‌صورت هارمونیک در حوزهٔ زمان در نظر گرفته شده است.

واژه‌های کلیدی ورق هوشمند مدرج تابعی، تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم، قوانین گاوس، تئوری اغتشاشات، ارتعاش غیرخطی اجباری.

Nonlinear Forced Vibration of Functionally Graded Magneto-Electro-Elastic Rectangular Plate based on the Third Order Shear Deformation Theory

R. Mantashloo A. Shooshtari

Abstract *In this paper, nonlinear vibration of the functionally graded rectangular plates made of piezoelectric $BaTiO_3$ and magnetostrictive $CoFe_2O_4$, whit simply supported boundary condition has been investigated. It is assumed that the composition is varied from the bottom surfaces to top surface, i.e., the top surface of the plate is piezoelectric-rich, whereas the bottom surface is magnetostrictive-rich. In addition, material properties are graded along the thickness according to volume fraction power-law distribution. Based on the Reddy's third-order share deformation plate theory, the governing equations of motion, whereas Maxwell equations for electrostatics and magnetostatics are used to model the electric and magnetic behavior. Then, the nonlinear partial differential equations of motion are transformed into five coupled nonlinear ordinary differential equations by using the Galerkin method. Afterward, the obtained coupled ordinary differential equations are reduced to a single nonlinear differential equation which include nonlinear inertia and stiffness terms with quadratic and cubic nonlinear terms. A perturbation method is used to solve the equation of motion analytically. The results for natural frequency are compared with the available results for isotropic, laminated and piezo-laminated plates and good agreement is found between the results of present study with the results of previously published papers. In the forced vibration, primary, super-harmonic resonances are studied and the frequency response equation has been obtained. Because of the importance of the primary resonance, the stability of the steady-state motion is investigated for the primary resonance, The applied external force is assumed to be harmonic in time with a constant amplitude.*

Key Words Functionally graded smart plate, Third order shear deformation theory, Gauss's laws, Perturbation method, Force vibration

*تاریخ دریافت مقاله ۹۶/۵/۹ و تاریخ پذیرش آن ۹۷/۵/۱۳ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v30i2.66477

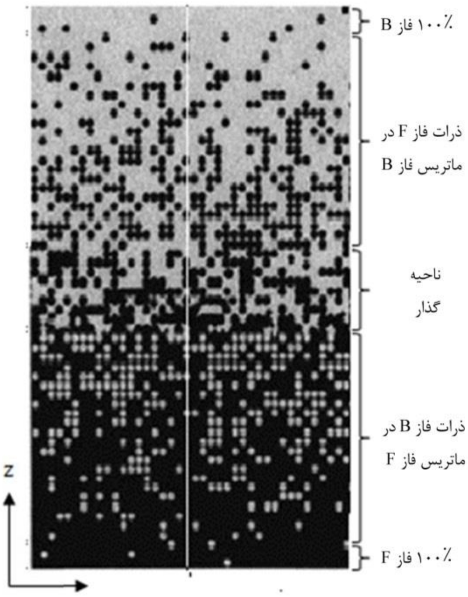
(۱) کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه بوعلی سینا

(۲) نویسندهٔ مسئول: دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه بوعلی سینا shooshta@basu.ac.ir

مقدمه

مواد مدرج تابعی (FGM) نوع جدیدی از مـواد مرکـب ناهمگن ساخته شده از مواد با فازهای مختلف هسـتند. نمونه‌ای از ساختار کلی این مـواد در شـکل (۱) نشـان داده شده است که در آن ذرات کروی یا تقریباً کـروی در درون ماتریس‌های همسانگرد جاسازی شـده اسـت. در این‌گونه از مواد مرکب، مواد میکروسـکوپی بـا فـاز مختلف تغییراتی با تابع‌هـای مختلـف دارنـد و امکـان بهینه کردن تغییرات تنش در این مواد مرکـب بـا تغییـر مناسـب پروفیـل مـواد سـاختاری کـه از ویژگـی‌هـای برجستهٔ این مواد است وجود دارد. مواد مـدرج تـابعی این‌گونه توصیف شده‌اند که فاز تقویـت‌کننـده و مـواد زمینه به‌صورت پیوسـته و بـه‌تـدریج و نـه بـه‌صـورت گسسته مانند مواد مرکب لایه‌ای تغییر می‌کنند.

به‌دلیـل پیوسـتگی موجـود در خـواص مکـانیکی، حرارتـی، الکتریکـی و مغناطیسـی ایـن‌گونـه از مـواد، کرنش‌ها و گرادیان آن‌ها حالت پیوسته‌ای پیدا می‌کننـد که همین تغییرات تدریجی خواص در ساختار این مواد مرکب موجب استحکام در کل آن می‌شود. در صـورتی که در مـواد مرکـب لایـه‌ای تـداخل بـین سـاختارهای زمینه‌ای و الیاف نوعی ناهماهنگی در خواص مکـانیکی ایجاد می‌کند. ایـن مـواد مقـاوم در مقابـل خـوردگی و سایش بوده و مقاومت بالایی در مقابل شکست دارنـد. در حال حاضر از این مواد برای سازه‌هایی کـه بایـد در مقابل دمای زیاد مقاوم باشد استفاده مـی‌شـود. یکـی از علت‌های تنش حرارتی افزایش دما مـی‌باشـد. بـه‌طـور مثال هنگامی که انبساط آزاد توسـط قیـدهای خـارجی محدود می‌شود و یا این‌کـه یـک جسـم چندلایـه‌ای از مواد مختلفی با ضرایب انبساط مختلـف تشـکیل شـده باشد، لایه‌های مختلـف مـاده بـه انـدازه‌هـای متفـاوتی انبساط پیدا می‌کند و این خـود باعـث ایجـاد تـنش در جسم می‌شود.



شکل ۱ ساختار کلی مواد مدرج تابعی [26]

مواد مـدرج تـابعی مگنتـو-الکتـرو-الاسـتیک کـه کوپلینـگ بـین میـدان‌هـای مکـانیکی، الکتریکـی و مغناطیسی را در بر دارند و می‌توانند انرژی را میان این سه شکل تبدیل کنند، کاربرد مستقیمی در سنسـورها و محرک‌ها، کنترل ارتعاشات در سازه‌هـا و غیـره دارنـد. همچنین از این مواد به‌تـازگی در برداشـت‌کننـده‌هـای انرژی نیـز اسـتفاده شـده اسـت. بسـاری از ایـن نـوع سازه‌های هوشمند به‌صورت تیر مدل‌سازی و اسـتفاده شده‌اند. در مقالهٔ حاضر ارتعاشـات اجبـاری غیرخطـی یک صفحه مستطیل‌شـکل مـورد بررسـی قـرار گرفتـه است.

فریرا و همکـاران [1] فرکـانس‌هـای طبیعـی ورق مربعی‌شکل مدرج تابعی را برای شرایط مرزی مختلـف به‌دسـت آوردنـد. حسـینی هاشـمی و همکـاران [2,3] ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی‌شکل مدرج تابعی را برای شرایط مرزی مختلف بررسی نمـوده و پاسـخ تحلیلـی برای آن به‌دست آوردند. ارتعاشات غیرخطی ورق‌هـای مدرج تابعی نیز موضوع تحقیقات زیـادی بـوده اسـت [4-6].

پاسخ دینامیکی خطی و غیرخطی ورق‌های پیزوالکتریک از نوع مدرج تابعی نیز توسط محققان زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است. ردی و چنگ [7] یک ورق مدرج تابعی را در نظر گرفته و با فرض اتصال یک لایهٔ پیزوالکتریک بر روی سطح فلزی این ورق مدرج تابعی و با اعمال بارگذاری ترمومکانیکی بر روی سطح سرامیکی، ارتعاش ورق هیبریدی حاصل را بررسی کرده و دامنهٔ ارتعاشات را با استفاده از اعمال ولتاژ به لایهٔ پیزوالکتریک خنثی نمودند. لیو و همکاران [8] رفتار پس‌کمانش ورق‌های مستطیلی‌شکل مدرج تابعی که عملگرهای پیزوالکتریک بر سطح آن چسبانده شده است را بر اساس تئوری برشی مرتبهٔ سوم تحلیل نمودند. کوپیال [9] فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ورق پیزوالکتریک مستطیلی‌شکل با شرایط مرزی ساده برای دو نوع شرط مرزی الکتریکی مدار باز و مدار بسته را مورد بررسی قرار داده است. شِن [10] پس‌کمانش پوستهٔ استوانه‌ای مدرج تابعی با عملگرهای پیزوالکتریک را در اثر فشار محوری ترکیب‌شده با بارهای الکتریکی در محیط گرم تحلیل نموده است. چِن [11] از روش گلرکین فاقد المان برای آنالیز کمانش و بررسی پایداری ورق‌های مستطیلی پیزوالکتریک مدرج تابعی که در معرض توزیع غیریکواخت نیروها، گرما و ولتاژ می‌باشند استفاده نمود. از روش المان محدود [14-12] و روش‌های تحلیلی اغتشاشات [17-15] نیز برای حل مسئلهٔ ارتعاش غیرخطی ورق مدرج تابعی تحت بارهای حرارتی، مکانیکی و الکتریکی استفاده شده است.

نزدیک دو دهه است که تحلیل و بررسی حرکت استاتیکی و دینامیکی سازه‌های مگنتو-الکترو-الاستیک مورد توجه قرار گرفته است. پان [18] برای اولین بار یک ورق چندلایه‌ای مگنتو-الکترو-الاستیک را به‌صورت تحلیلی بررسی کرده و جواب‌های ورق چندلایه‌ای را برحسب تکثیرکننده‌های ماتریسی بیان نمود. ارتعاش آزاد و تصادفی ورق‌های مستطیلی شکل مگنتو-الکترو-الاستیک در تماس با سیال [19] و کمانش و ارتعاش پوسته استوانه‌ای مگنتو-الکترو-الاستیک بر اساس تئوری برشی مرتبه بالا [20] نیز مورد بررسی قرار گرفته‌اند. چن و همکاران [21] مسئلهٔ ارتعاش آزاد ورق‌های مگنتو-الکترو-الاستیک چندلایه‌ای با شرایط مرزی ترکیبی گیردار/آزاد حل نمودند. لی و ژانگ [22] و رضوی و شوشتری [23] از تئوری برشی مرتبهٔ اول، به‌ترتیب، برای تعیین فرکانس‌های طبیعی ورق و پوستهٔ دوانحنایی مگنتو-الکترو-الاستیک بر روی یک بستر الاستیک استفاده کرده و اثرات ضرایب بستر و فرکانس‌های الکتریکی و مغناطیسی را بر روی فرکانس طبیعی تعیین نمودند. انصاری و همکاران [24] ارتعاش غیرخطی نانو تیر مگنتو-الکترو-الاستیک را براساس مدل تیر تیموشنکو و تئوری الاستیسیتهٔ غیرموضعی و تئوری برشی مرتبه سوم غیرموضعی [25] تحلیل نمودند.

با وجود این‌که بانگل و گانسان [26] بااستفاده از روش اجزای محدود، تحقیقات مختلفی را برای تحلیل ارتعاشات خطی ورق‌ها و پوسته‌های استوانه‌ای مگنتو-الکترو-الاستیک چندلایه‌ای و مدرج تابعی استفاده نمودند، هیچ مطالعهٔ تحلیلی دربارهٔ ارتعاشات غیرخطی این نوع از مواد و ورق‌های هوشمند مدرج تابعی برمبنای تئوری برشی مرتبه سوم در رابطه با تعیین فرکانس‌های غیرخطی، تأثیر پارامترهای هندسی و پراکندگی ساختار در مواد مدرج تابعی بر این فرکانس‌ها انجام نشده است.

در این تحقیق، از تئوری برشی مرتبه سوم (TSDT) برای تعیین معادلات حرکت ورق استفاده شده است. ورق به‌صورت مستطیلی‌شکل با تکیه‌گاه ساده در هر چهار لبه و بدون امکان حرکت صفحه‌ای در لبه‌ها فرض شده‌است (شکل ٤).

معادلات ساختاری مواد مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک

کوپلینگ مگنتو-الکتریک-الاستیک این مواد از طریق روابط تنش-کرنش صورت می‌گیرد. معادلات ساختاری مواد مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک خطی به‌صورت زیر نوشته می‌شوند [26].

$$\sigma = C\varepsilon + e(-E) + q(-H) \quad (\text{۱-الف})$$

$$D = e^T\varepsilon - \epsilon(-E) - d(-H) \quad (\text{۱-ب})$$

$$D = q^T\varepsilon - d(-E) - \mu(-H) \quad (\text{۱-پ})$$

که برای یک ورق مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک همسانگرد ضرایب در حالت بسط‌یافته به‌صورت زیر می‌باشند:

$$C = \begin{bmatrix} C(z)_{11} & C(z)_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C(z)_{21} & C(z)_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C(z)_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C(z)_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C(z)_{66} \end{bmatrix}$$

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e(z)_{31} \\ 0 & 0 & e(z)_{32} \\ 0 & e(z)_{24} & 0 \\ e(z)_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e(z)_{31} \\ 0 & 0 & e(z)_{32} \\ 0 & e(z)_{24} & 0 \\ e(z)_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon(z)_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon(z)_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon(z)_{33} \end{bmatrix}, \mu = \begin{bmatrix} \mu(z)_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mu(z)_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu(z)_{33} \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} d(z)_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d(z)_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d(z)_{33} \end{bmatrix} \quad (۲)$$

که σ و ε به‌ترتیب بردار تنش و کرنش، D و B به‌ترتیب بردار جابه‌جایی الکتریکی و چگالی شار مغناطیسی، E و H به‌ترتیب بردار میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی، C، ϵ و μ به‌ترتیب ضرایب ماتریس الاستیک، دی‌الکتریک و نفوذپذیری مغناطیسی، e، q و d به‌ترتیب ضرایب ماتریس پیزوالکتریک و پیزومغناطیس، مگنتو-الکتریک هستند.

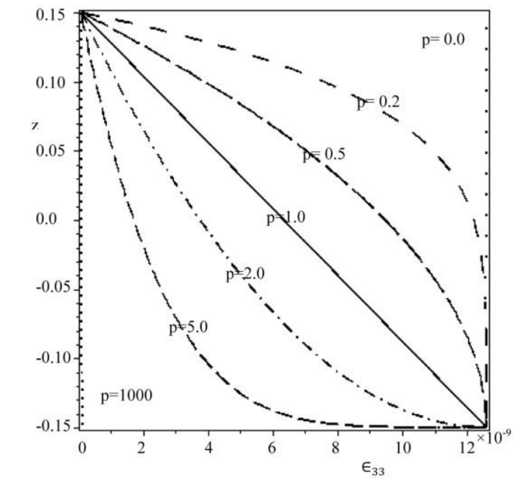
مدل ریاضی خواص مواد مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک. اگر ورق مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک از دو فاز پیزوالکتریک $BaTiO_3$ (B) و پیزومغناطیس $CoFe_2O_4$ (C) طوری تشکیل شده باشد که تغییر تدریجی خواص ماده در راستای ضخامت و از سطح پایین به سطح بالا باشد، (شکل ۲)، کسر حجمی فاز B در جهت ضخامت و مطابق قانون توانی به‌صورت زیر توصیف می‌گردد [26]:

$$V_B = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^{p} \quad (۳)$$

که در آن h ضخامت ورق، z معرف مختصهٔ ضخامت که $0 \le z \le +h$ و p پارامتر توانی حقیقی و مثبتی بی‌بعدی است. همچنین قانون مخلوط‌ها و نخستین قانون خطی کلاسیک ترکیب‌ها برای مواد دوجزئی به‌ترتیب به‌صورت زیر نوشته می‌شوند [26]:

$$V_B + V_C = 1 \quad (٤)$$

$$P_{eff} = P_B V_B + P_C V_C \quad (٥)$$



شکل ۲ تغییر کسر حجمی V_B در طول ضخامت

با ترکیب معادلات (۵-۳) تغییرات خواص مؤثر الاستیک، پیزوالکتریک، پیزومغناطیس، دی‌الکتریک و نفوذپذیری مغناطیسی در دمای ثابت به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$C(z)_{ij} = (C_C - C_C)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p + C_C \qquad \text{(٦-الف)}$$

$$e(z)_{ij} = (e_C - e_C)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p + e_C \qquad \text{(٦-ب)}$$

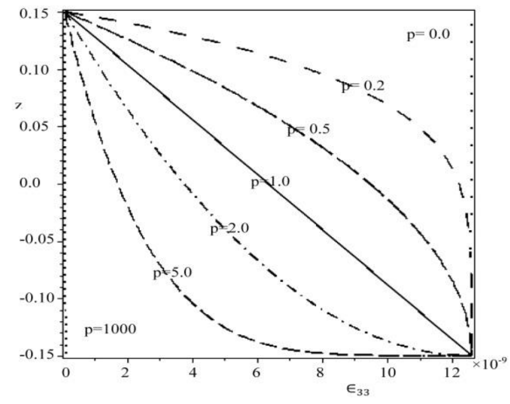
$$q(z)_{ij} = (q_C - q_C)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p + q_C \qquad \text{(٦-پ)}$$

$$\epsilon(z)_{ij} = (\epsilon_C - \epsilon_C)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p + \epsilon_C \qquad \text{(٦-ت)}$$

$$\mu(z)_{ij} = (\mu_C - \mu_C)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p + \mu_C \qquad \text{(٦-ث)}$$

$$\rho = (\rho_C - \rho_C)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p + \rho_C \qquad \text{(٦-ج)}$$

تغییرات ضریب دی‌الکتریک ϵ_{33} مؤثر برای چند مورد مختلف توان p در عرض ضخامت ورق در شکل (۳) نشان داده شده است. لی [27] با استفاده از آنالیز میکرومکانیکی مادهٔ مرکب متشکل از دو فاز B-C نشان داد که اندازهٔ مدول مگنتو-الکتریک (d_{33}) غیر صفر بوده و وابسته به فاکتورهایی مانند روش ترکیب مواد و کسر حجمی هر یک از دو فاز است. تحقیقات اخیر نشان داده‌اند در حالتی که ورق تحت پتانسیل الکتریکی یا مغناطیسی قرار دارد و هدف مطالعهٔ رفتار دینامیکی ارتعاشی ورق باشد اثر ضریب مگنتو-الکتریک بر فرکانس ارتعاشی بسیار ناچیز است و می‌توان از آن چشم پوشید.



شکل ۳ تغییرات ضریب دی‌الکتریک ϵ_{33} نسبت به تغییر گرادیان مواد p

مدل‌سازی مسئله با استفاده از تئوری HSDT

در این تئوری میدان‌های جابه‌جایی طبق اصل همیلتون به‌صورت تابعی درجه سوم از (u,v,w) در راستای ضخامت به‌صورت زیر هستند [28]:

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= u_0(x,y,t) + z\phi_x(x,y,t) - \frac{4}{3h^2}z^3\left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) \\ v(x,y,z,t) &= v_0(x,y,t) + z\phi_y(x,y,t) - \frac{4}{3h^2}z^3\left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \\ w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t) \end{aligned} \qquad (٧)$$

که u_0، v_0، w_0، $\phi_x = \frac{\partial v}{\partial z}$ و $\phi_y = \frac{\partial u}{\partial z}$ تغییرمکان‌های تعمیم‌یافته بوده و توابع مجهولی هستند که باید تعیین شوند. u_0، v_0 و w_0 تغییر جابه‌جایی‌های یک نقطه از ورق در صفحهٔ $z = 0$ را نشان می‌دهند.

کرنش‌های غیرخطی متناظر با تئوری برشی مرتبه سوم به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \varepsilon_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \varepsilon_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi_y}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \varepsilon_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix} = -c_1 \begin{Bmatrix} \left(\dfrac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) \\ \left(\dfrac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) \\ \left(\dfrac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi_y}{\partial y} + 2\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right) \end{Bmatrix}, \; c_1 = \frac{4}{(3h^2)}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_y + \dfrac{\partial w_0}{\partial y} \\ \phi_x + \dfrac{\partial w_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix} = -3c_1 \begin{Bmatrix} \left(\phi_y + \dfrac{\partial w_0}{\partial y}\right) \\ \left(\phi_x + \dfrac{\partial w_0}{\partial x}\right) \end{Bmatrix} \qquad (٨)$$

که در آن $c_1 = \frac{4}{3h^2}$ و $c_2 = 3c_1$ است. معادلات حاکم بر یک ورق مگنتو-الکترو-الاستیک مدرج تابعی در تئوری برشی مرتبه سوم به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$N_{xx.x} + N_{xy.y} = I_0 u_{0.tt} + (I_1 - c_1 I_3)\varphi_{x.tt} - c_1 I_3 w_{0.tt} \quad (\text{۹-الف})$$

$$N_{yy.y} + N_{xy.x} = I_0 v_{0.tt} + (I_1 - c_1 I_3)\varphi_{y.tt} - c_1 I_3 w_{0.tt} \quad (\text{۹-ب})$$

$$\begin{aligned}&(N_{yy.y} + N_{xy.x})w_{0.y} + (N_{xx.x} + N_{xy.y})w_{0.x} + N_{yy}w_{0.yy} \\ &+N_{xx}w_{0.xx} + c_1(P_{xx.xx} + P_{xy.xy} + P_{yy.yy}) \\ &+(Q_{x.x} - c_2 R_{x.x}) + (Q_{y.y} - c_2 R_{y.y}) + q_z \\ &= I_0 w_{0.tt} - c_1^2 I_6 (w_{0.ttxx} + w_{0.ttxx}) \\ &+c_1 I_3 (u_{0.tt} + v_{0.tt}) + c_1(I_4 - c_1 I_6)(\varphi_{x.xtt} + \varphi_{y.ytt})\end{aligned} \quad (\text{۹-پ})$$

$$\begin{aligned}&M_{xx.x} + M_{xy.y} - c_1(P_{xx.x} + P_{xy.y}) + (Q_x - c_2 R_x) \\ &= -c_1(I_4 - c_1 I_6)w_{0.xtt} + (I_2 - 2c_1 I_4 + c_1^2 I_6)\varphi_{x.tt} \\ &+(I_1 - c_1 I_3)u_{0.tt}\end{aligned} \quad (\text{۹-ت})$$

$$\begin{aligned}&M_{yy.y} + M_{xy.x} - c_1(P_{yy.y} + P_{xy.x}) + (Q_y - c_2 R_y) \\ &= -c_1(I_4 - c_1 I_6)w_{0.ytt} + (I_2 - 2c_1 I_4 + c_1^2 I_6)\varphi_{y.tt} \\ &+(I_1 - c_1 I_3)v_{0.tt}\end{aligned} \quad (\text{۹-ث})$$

که در آن علامت '،' مشتق نسبی نسبت به تغییر مکان‌های تعمیم‌یافته می‌باشند. کمیت‌های $N_{\alpha\beta}$ منتجه‌های نیروی صفحه‌ای، $M_{\alpha\beta}$ منتجه‌های ممان، $Q_{\alpha\beta}$ منتجه‌های نیروی عرضی و $P_{\alpha\beta}$ و $R_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = x, y)$ منتجه‌های تنش مرتبه بالاتر و I_θ ممان‌های اینرسی جرمی هستند که برای ورق مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک در تئوری برشی مرتبه سوم به‌صورت زیر نوشته می‌شود که هم شامل اثر مؤلفه‌های الاستیک ورق و هم شامل اثر مؤلفه‌های الکترواستریکتیو و مگنتواستریکتیو ورق است [28]:

$$\begin{Bmatrix} N_{ij} \\ M_{ij} \\ P_{ij} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{ij} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^3 \end{Bmatrix} \mathrm{d}z \quad (\text{۱۰})$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{ij} \\ R_{ij} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{ij} \begin{Bmatrix} 1 \\ z^2 \end{Bmatrix} \mathrm{d}z \quad (\text{۱۱})$$

$$I_\theta = \int_{-h/2}^{+h/2} z^i \, \rho(z)\mathrm{d}z \,.\, (\theta = 0.1.2.3.4.6) \quad (\text{۱۲})$$

قوانین گوس برای حالت‌های الکترواستاتیک و مگنتواستاتیک، به‌صورت زیر هستند [29]:

$$D_{x,x} + D_{y,y} + D_{z,z} = 0 \quad (\text{۱۳-الف})$$

$$B_{x,x} + B_{y,y} + B_{z,z} = 0 \quad (\text{۱۳-ب})$$

با استفاده از دو معادلهٔ (۱۳-الف و ب) گرادیان پتانسیل‌های الکتریکی و مغناطیسی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\Phi_{,z} = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})\frac{e_{31}(z)}{\epsilon_{33}\,(z)} + \left(\varepsilon_{xx}^{(3)} + \varepsilon_{yy}^{(3)}\right)\frac{e(z)}{\epsilon_{33}\,(z)} + \Phi_0 \quad (\text{۱۴})$$

$$\Phi_{,z} = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})\frac{e_{31}(z)}{\epsilon_{33}\,(z)} + \left(\varepsilon_{xx}^{(3)} + \varepsilon_{yy}^{(3)}\right)\frac{e(z)}{\epsilon_{33}\,(z)} + \Phi_0 \quad (\text{۱۵})$$

که در آن Φ_0 و Ψ_0 ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند که با توجه به شرایط مرزی الکتریکی و مغناطیسی زیر به‌دست می‌آیند: (V_0 و Ω_0 به‌ترتیب پتانسیل‌های الکتریکی و مغناطیسی هستند. مقدار e(z) و q(z) در پیوست آورده شده‌اند).

$$\begin{aligned}&\Phi(x, y, -h/2) = 0 \,, \Phi(x, y, +h/2) = V_0 \\ &\Psi(x, y, -h/2) = 0 \,, \Psi(x, y, +h/2) = \Omega_0\end{aligned} \quad (\text{۱۶})$$

با جای‌گذاری معادلات (۲-۱) به‌همراه کرنش‌های غیرخطی متناظر تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم

(معادلهٔ ۸) در معادلات (۱۲-۱۰) و با فرض اینکه میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در راستای ضخامت (z) باشند، منتجه‌های نیرو ممان و منتجه‌های تنش مرتبه بالا به‌شکل بسط‌یافته زیر تعیین می‌گردند:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{ela} & A_{12}^{ela} & 0 \\ A_{21}^{ela} & A_{22}^{ela} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66}^{ela} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \varepsilon_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11}^{ela} & B_{12}^{ela} & 0 \\ B_{21}^{ela} & B_{22}^{ela} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^{ela} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \varepsilon_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{11}^{ela} & E_{12}^{ela} & 0 \\ E_{21}^{ela} & E_{22}^{ela} & 0 \\ 0 & 0 & E_{66}^{ela} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \varepsilon_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix} - \int_{-h/2}^{+h/2} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31}(z) \\ 0 & 0 & e_{32}(z) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Phi_{,z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & q_{31}(z) \\ 0 & 0 & q_{32}(z) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Psi_{,z} \end{Bmatrix} \right) dz$$

(۱۷)

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{ela} & A_{12}^{ela} & 0 \\ A_{21}^{ela} & A_{22}^{ela} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66}^{ela} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \varepsilon_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11}^{ela} & B_{12}^{ela} & 0 \\ B_{21}^{ela} & B_{22}^{ela} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^{ela} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \varepsilon_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_1E_{11}^{ela} & c_1E_{12}^{ela} & 0 \\ c_1E_{21}^{ela} & c_1E_{22}^{ela} & 0 \\ 0 & 0 & c_1E_{66}^{ela} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \varepsilon_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix} - \int_{-h/2}^{+h/2} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31}(z) \\ 0 & 0 & e_{32}(z) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Phi_{,z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & q_{31}(z) \\ 0 & 0 & q_{32}(z) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Psi_{,z} \end{Bmatrix} \right) z^1\, dz$$

(۱۸)

$$\begin{Bmatrix} P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{ela} & A_{12}^{ela} & 0 \\ A_{21}^{ela} & A_{22}^{ela} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66}^{ela} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \varepsilon_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11}^{ela} & B_{12}^{ela} & 0 \\ B_{21}^{ela} & B_{22}^{ela} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^{ela} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \varepsilon_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_1E_{11}^{ela} & c_1E_{12}^{ela} & 0 \\ c_1E_{21}^{ela} & c_1E_{22}^{ela} & 0 \\ 0 & 0 & c_1E_{66}^{ela} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \varepsilon_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix} - \int_{-h/2}^{+h/2} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31}(z) \\ 0 & 0 & e_{32}(z) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Phi_{,z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & q_{31}(z) \\ 0 & 0 & q_{32}(z) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Psi_{,z} \end{Bmatrix} \right) z^3\, dz$$

(۱۹)

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^{ela} & 0 \\ 0 & A_{55}^{ela} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{44}^{ela} & 0 \\ 0 & D_{55}^{ela} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix}$$

(۲۰)

$$\begin{Bmatrix} R_x \\ R_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{44}^{ela} & 0 \\ 0 & D_{55}^{ela} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{44}^{ela} & 0 \\ 0 & F_{55}^{ela} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix}$$

(۲۱)

در معادلات بالا X_{ij}^{ela} سفتی‌های مربوط به ترم الاستیک، X_{ij}^{me} سفتی‌های مربوط به ترم مگنتو-الکتریک هستند. فرض‌های زیر برای سادگی و اختصار در معادلات به‌کار برده شده‌اند.

$$X_{ij}^{ela} + X_{ij}^{me} = X_{ij}\ ,X = (A,B,D,E,F,H)$$

$$X_{ij}^{ela} = \int_{-h/2}^{+h/2} C_{ij}(z)(1,z,z^2,z^3,z^4,z^6)dz\,,(i,j=1,2,6)$$

$$X_{ij}^{ela} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij}(z)(1,z^2,z^4,)dz\,,(i,j=4,5)$$

$$X_{ij}^{me} = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{e_{31}(z)}{\in_{33}(z)} - \frac{V_1}{h} \right) e_{31}(z)(1,z,z^2,z^3,z^4,z^6)dz + \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{q_{31}(z)}{\mu_{33}(z)} - \frac{\Omega_1}{h} \right) q_{31}(z)(1,z,z^2,z^3,z^4,z^6)dz$$

(۲۲)

$$\left(\delta_1^{me},\delta_2^{me},\delta_3^{me}\right) = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{e(z)}{\in_{33}(z)} e_{31}(z) - \frac{V_2}{h} e_{31}(z) \right) \left(1,z,z^3\right) dz + \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{q(z)}{\mu_{33}(z)} q_{31}(z) - \frac{\Omega_2}{h} q_{31}(z) \right) \left(1,z,z^3\right) dz$$

(۲۳)

باتوجه به این‌که اثرات جملات اینرسی مربوط به جابه‌جایی‌های تعمیم‌یافته u_0، v_0 و دوران‌های عرضی φ_x ، φ_y بسیار کوچک هستند، از اثرات این جملات اینرسی چشم‌پوشی می‌شود، سپس با استفاده از معادلات (۲۱–۱۷) در معادلات (۹–الف– ث) پنج معادلهٔ دیفرانسیل حرکت جزئی غیرخطی در ترم‌های جابه‌جایی‌های تعمیم‌یافته u_0، v_0 و w_0 و دوران‌های φ_x، φ_y به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$
\begin{aligned}
&A_{11}u_{0,xx} + A_{66}u_{0,yy} + (B_{11} - c_1E_{11} - c_1\delta_1)\varphi_{x,xx} \\
&+(A_{11} - A_{66})\big(v_{0,xy} + w_{0,y}w_{0,xy}\big) \\
&\qquad + (B_{66} - c_1E_{66})\varphi_{x,yy} \\
&\qquad + (B_{11} - c_1AE_{11} - B_{66} + c_1E_{66} \\
&\qquad - c_1\delta_1)\varphi_{y,xy} \\
&\qquad + A_{66}w_{0,x}w_{0,yy} + A_{11}w_{0,x}w_{0,xx} \\
&\qquad - (c_1E_{11} + \delta_1)\big(w_{0,xxx} + w_{0,xyy}\big) \\
&\qquad = -c_1I_3w_{0.ttx}
\end{aligned}
$$

(۲٤–الف)

$$
\begin{aligned}
&A_{11}v_{0,yy} + A_{66}v_{0,xx} + (B_{11} - c_1E_{11} - c_1\delta_1)\varphi_{y,yy} \\
&+\left(A_{11} - A_{66}\right)\left(u_{0,xy} + w_{0,x}w_{0,xy}\right) + \left(B_{66} - c_1E_{66}\right)\varphi_{y,xx} \\
&+\left(B_{11} - c_1AE_{11} - B_{66} + c_1E_{66} - c_1\delta_1\right)\varphi_{x,xy} \\
&+A_{66}w_{0,y}w_{0,xx} + A_{11}w_{0,y}w_{0,yy} - \left(c_1E_{11} + \delta_1\right)w_{0,yyy}w_{0,xxy} \\
&= -c_1I_3w_{0.tty}
\end{aligned}
$$

(۲٤–ب)

$$
\begin{aligned}
&(A_{11} - 2A_{66})u_{0,x}w_{0,yy} + A_{11}u_{0,x}w_{0,xx} \\
&\qquad + 2A_{66}u_{0,y}w_{0,yx} \\
&\qquad + (A_{11} - A_{66})w_{0,y}u_{0,yx} \\
&\qquad + A_{11}w_{0,x}u_{0,yy} + A_{11}w_{0,x}u_{0,xx} \\
&\qquad + c_1E_{11}u_{0,xxx} + c_1E_{11}u_{0,yyx} \\
&\qquad + 2A_{66}v_{0,x}w_{0,yx} + A_{11}v_{0,y}w_{0,yy} \\
&\qquad + (A_{11} - 2A_{66})v_{0,y}w_{0,xx} \\
&\qquad + A_{11}w_{0,y}v_{0,yy} + A_{66}w_{0,y}v_{0,xx} \\
&\qquad + (A_{11} - A_{66})w_{0,x}v_{0,yx} \\
&\qquad + c_1E_{11}v_{0,yyy} + c_1E_{11}v_{0,yxx} \\
&\qquad + (A_{11} - A_{66})w_{0,x}v_{0,yx} \\
&\qquad + c_1E_{11}v_{0,yyy} + c_1E_{11}v_{0,yxx} \\
&\qquad + \frac{1}{2}A_{11}w_{0,y}^2w_{0,xx} \\
&\qquad + (c_2^2F_{44} - 2c_2D_{44} + A_{44})w_{0,xx} \\
&\qquad + (c_2^2F_{44} - 2c_2D_{44} + A_{44})w_{0,yy} \\
&\qquad - c_1\delta_1w_{0,yy}w_{0,yy} \\
&-2c_1(E_{11} - 3E_{66} + \delta_1)w_{0,yy}w_{0,xx} - c_1\delta_1w_{0,xx}w_{0,xx} \\
&+2(c_1E_{11} - 3E_{66})w_{0,yx}^2 + 2A_{11}w_{0,y}w_{0,x}w_{0,yx} \\
&+\frac{3}{2}A_{11}w_{0,x}^2w_{0,xx} - c_1\delta_1w_{0,x}w_{0,xxx} - c_1\delta_1w_{0,x}w_{0,yyx} \\
&-c_1\delta_1w_{0,y}w_{0,yxx} - c_1\delta_1w_{0,y}w_{0,yyy} \\
&\qquad - c_1^2(H_{11} + \delta_3)w_{0,xxxx} \\
&-2c_1^2(H_{11} + \delta_3)w_{0,yyxx} - c_1^2(H_{11} + \delta_3)w_{0,yyyy} \\
&+(B_{11} - c_1(E_{11} + \delta_1) + 2c_1E_{66} - 2B_{66})\phi_{x,x}w_{0,yy} \\
&-(c_2^2F_{44} + 2c_2D_{44} - A_{44})\phi_{x,x} \\
&\qquad + (2B_{66} - c_1E_{66})\phi_{x,y}w_{0,yx} \\
&+(B_{11} - c_1(E_{11} + \delta_1) + c_1E_{66} - B_{66})w_{0,y}\phi_{x,yx} \\
&+\big(B_{11} - c_1(E_{11} + \delta_1)\big)w_{0,x}\phi_{x,xx} + \Omega w_{0,yy} \\
&+(B_{66} - c_1E_{66})w_{0,x}\phi_{x,yy} \\
&\qquad + \Big(c_1F_{11} - c_1^2(H_{11} + \delta_3)\Big)\phi_{x,xxx} \\
&+Vw_{0,xx} + \left(c_1F_{11} - c_1^2\left(H_{11} + \delta_3\right)\right)\phi_{x,yyx} + \frac{3}{2}A_{11}w_{0,y}^2w_{0,yy} \\
&-(c_2^2F_{44} + 2c_2D_{44} - A_{44})\phi_{y,y} \\
&\qquad + (B_{66} - c_1E_{66})w_{0,y}\phi_{y,xx} \\
&+\big(B_{11} - c_1(E_{11} + \delta_1)\big)\phi_{y,y}w_{0,yy} + \frac{1}{2}A_{11}w_{0,x}^2w_{0,yy} \\
&+\left(2B_{66} - c_1E_{66}\right)\phi_{y,x}w_{0,yx} + \left(B_{11} - c_1\left(E_{11} + \delta_1\right)\right)\phi_{x,x}w_{0,xx} \\
&+(B_{11} - c_1(E_{11} + \delta_1) + c_1E_{66} - B_{66})\phi_{y,y}w_{0,xx} \\
&+\big(B_{11} - c_1(E_{11} + \delta_1)\big)w_{0,y}\phi_{y,yy} \\
&+\Big(c_1F_{11} - c_1^2(H_{11} + \delta_3)\Big)\phi_{y,yxx} \\
&+(B_{11} - c_1(E_{11} + \delta_1) + c_1E_{66} - B_{66})w_{0,x}\phi_{y,yx} \\
&\qquad + q_0\cos(\Omega t) \\
&\qquad + \Big(c_1F_{11} - c_1^2(H_{11} + \delta_3)\Big)\phi_{y,yyy} \\
&= I_0\ddot{w}_0 - c_1^2I_6\ddot{w}_{0,xx} - c_1^2I_6\ddot{w}_{0,yy}
\end{aligned}
$$

(۲٤–پ)

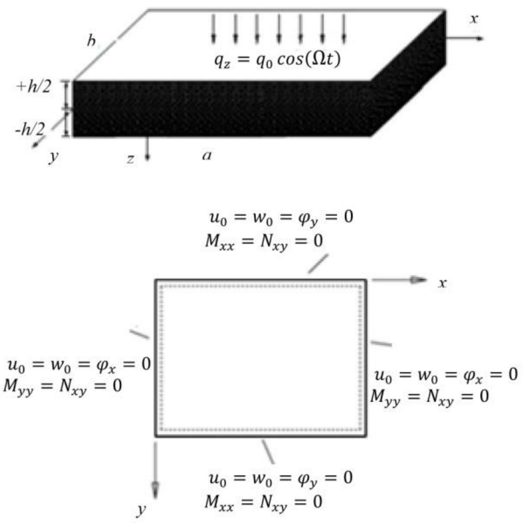
$$
\begin{aligned}
&(B_{11} - c_1E_{11})u_{0,xx} + (-c_1E_{11} + c_1E_{66} + B_{11} \\
&\qquad - B_{66})v_{0,yx} \\
&\qquad + (B_{66} - c_1E_{66})u_{0,yy} \\
&\qquad + (B_{66} - c_1E_{66})w_{0,x}w_{0,yy} \\
&\qquad + (c_1E_{11} - c_1E_{66} - B_{11} \\
&\qquad + B_{66})w_{0,y}w_{0,yx} \\
&\qquad - c_1(c_1(-H_{11} - \delta_3) + F_{11} \\
&\qquad + \delta_2)w_{0,xxx} \\
&\qquad + (B_{11} - c_1E_{11})w_{0,x}w_{0,xx} \\
&\qquad - c_1(c_1(-H_{11} - \delta_3) + F_{11} \\
&\qquad + \delta_2)w_{0,yyx} \\
&\qquad + (c_1^2(H_{11} + \delta_3) - c_1(2F_{11} + \delta_2) \\
&\qquad + D_{11})\phi_{x,xx} \\
&+(c_1^2H_{66} - 2c_1F_{66} + D_{66})\phi_{x,yy} \\
&\qquad + c_1^2(H_{11} - H_{66} + \delta_3)\phi_{y,yx} \\
&\qquad + (-c_1(2F_{11} - 2F_{66} + \delta_2) + D_{11} \\
&\qquad - D_{66})\phi_{y,yx} \\
&\qquad - (c_2^2F_{44} - 2c_2D_{44} + A_{44})\,\phi_x \\
&\qquad - (c_2^2F_{44} - 2c_2D_{44} + A_{44})w_{0,x} \\
&= c_1(c_1I_6 - I_4)\ddot{w}_{0,x}
\end{aligned}
$$

(۲٤–ت)

$$\begin{aligned}
&(B_{66}-c_1E_{66})v_{0,xx}+(-c_1E_{11}+c_1E_{66}+B_{11}\\
&\quad -B_{66})u_{0,yx}\\
&+(B_{66}-c_1E_{66})w_{0,y}w_{0,xx}+(B_{11}-c_1E_{11})w_{0,y}w_{0,yy}\\
&+(c_1E_{11}-c_1E_{66}-B_{11}+B_{66})w_{0,x}w_{0,yx}+D_{11}\phi_{x,yx}\\
&-c_1(c_1(-H_{11}-\delta_3)+F_{11}+\delta_2)w_{0,yyy}-+D_{11}\phi_{x,yx}\\
&+(B_{11}-c_1E_{11})v_{0,yy}\\
&\quad -c_1(c_1(-H_{11}-\delta_3)+F_{11}\\
&\quad +\delta_2)w_{0,yxx}\\
&\quad +(c_1^2(H_{11}+\delta_3)-c_1(2F_{11}+\delta_2)\\
&\quad +D_{11})\phi_{y,yy}\\
&\quad +(c_1^2H_{66}-2c_1F_{66}+D_{66})\phi_{y,xx}\\
&\quad +\Big(c_1^2(H_{11}-H_{66}+\delta_3)\\
&\quad -c_1(2F_{11}-2F_{66}+\delta_2)\Big)\phi_{x,yx}\\
&\quad -(c_2^2F_{44}-2c_2D_{44}+A_{44})\phi_y\\
&\quad -(c_2^2F_{44}-2c_2D_{44}+A_{44})w_{0,y}\\
&\quad =c_1(c_1I_6-I_4)\ddot{w}_{0,y}
\end{aligned}$$

(٢٤-ث)

در این معادلات، A_{ij} سفتی‌های کششی، B_{ij} سفتی‌های کوپلینگ خمشی-کششی و D_{ij} سفتی‌های خمشی نامیده می‌شوند. E_{ij}، F_{ij} و H_{ij} سفتی‌های مرتبه بالای ضخامت را شامل می‌شوند که تأثیر کمی در پاسخ ورق‌های نازک یا نسبتاً نازک همگن دارند.



شکل ٤ مشخصات هندسی و شرایط مرزی ورق مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک

شرایط تکیه‌گاهی ورق ساده و همگن در نظر گرفته شده است. جابه‌جایی‌ها و چرخش‌ها متناظر با این شرایط مرزی شکل (٤) به‌صورت زیر هستند (به‌طوری که $\alpha = n\pi/a$ و $\beta = m\pi/b$ است و (m,n) نشان‌دهندهٔ مود حرکتی ورق می‌باشد.):

$$\begin{aligned}
u_0(x,y,t)&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}U_{mn}(t)Cos\alpha x Sin\beta y\\
v_0(x,y,t)&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}V_{mn}(t)Sin\alpha x Cos\beta y\\
w_0(x,y,t)&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}hW_{mn}(t)Sin\alpha x Sin\beta y\\
\phi_x(x,y,t)&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}X_{mn}(t)Cos\alpha x Sin\beta y\\
\phi_y(x,y,t)&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}Y_{mn}(t)Sin\alpha x Cos\beta y
\end{aligned}$$

(٢٥)

با استفاده از روش گلرکین، چهار معادلهٔ دیفرانسیل جزئی غیرخطی (٢٤-الف)، (٢٤-ب)، (٢٤-ت) و (٢٤-ث) به چهار معادلهٔ دیفرانسیل معمولی غیرخطی برحسب $U_{mn}(t)$، $V_{mn}(t)$ و $X_{mn}(t)$، $Y_{mn}(t)$ و $W_{mn}(t)$ (جابه‌جایی عرضی) تبدیل می‌شوند. درنتیجه به‌صورت دستگاه معادلات زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&K_{1,1}U_{mn}(t)+K_{1,2}V_{mn}(t)+K_{1,3}X_{mn}(t)+K_{1,4}Y_{mn}(t)\\
&=-K_{1,5}\ddot{W}_{mn}(t)-K_{1,6}W_{mn}(t)-K_{1,7}W_{mn}^2(t)\\
&K_{2,1}U_{mn}(t)+K_{2,2}V_{mn}(t)+K_{2,3}X_{mn}(t)+K_{2,4}Y_{mn}(t)\\
&=-K_{2,5}\ddot{W}_{mn}(t)-K_{2,6}W_{mn}(t)-K_{2,7}W_{mn}^2(t)\\
&K_{4,1}U_{mn}(t)+K_{4,2}V_{mn}(t)+K_{4,3}X_{mn}(t)+K_{4,4}Y_{mn}(t)\\
&=-K_{4,5}\ddot{W}_{mn}(t)-K_{4,6}W_{mn}(t)-K_{4,7}W_{mn}^2(t)\\
&K_{5,1}U_{mn}(t)+K_{5,2}V_{mn}(t)+K_{5,3}X_{mn}(t)+K_{5,4}Y_{mn}(t)\\
&=-K_{5,5}\ddot{W}_{mn}(t)-K_{5,6}W_{mn}(t)-K_{5,7}W_{mn}^2(t)
\end{aligned}$$

(٢٦)

معادلهٔ (٢٤-پ) با استفاده از این روش به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
&L_{3,1}U_{mn}(t)+L_{3,2}V_{mn}(t)+L_{3,3}X_{mn}(t)+L_{3,4}Y_{mn}(t)\\
&+L_{3,5}U_{mn}(t)W_{mn}(t)+L_{3,6}V_{mn}(t)W_{mn}(t)\\
&+L_{3,7}X_{mn}(t)W_{mn}(t)+L_{3,8}Y_{mn}(t)W_{mn}(t)+L_{3,9}\ddot{W}_{mn}(t)\\
&+L_{3,10}W_{mn}(t)+L_{3,11}W_{mn}^2(t)+L_{3,12}W_{mn}^3(t)=0
\end{aligned}$$

(٢٧)

جواب دستگاه معادلات (۲۶) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} U_{mn}(t) &= L_{1,1}\ddot{W}_{mn}(t) + L_{1,2}W_{mn}(t) + L_{1,3}W_{mn}^2(t) \\ V_{mn}(t) &= L_{2,1}\ddot{W}_{mn}(t) + L_{2,2}W_{mn}(t) + L_{2,3}W_{mn}^2(t) \\ X_{mn}(t) &= L_{4,1}\ddot{W}_{mn}(t) + L_{4,2}W_{mn}(t) + L_{4,3}W_{mn}^2(t) \\ Y_{mn}(t) &= L_{5,1}\ddot{W}_{mn}(t) + L_{5,2}W_{mn}(t) + L_{5,3}W_{mn}^2(t) \end{aligned} \quad (۲۸)$$

در معادلات فوق مقدار ضرایب $L_{i,j}$ $(i=1,2,4,5;\ j=1,2,3)$ و $K_{i,j}$ $(i=1,2,4,5;\ j=1,2,3,4,5,6,7)$ است که در مرجع [32] آورده شده‌اند.

جدول ۱ خواص مواد مگنتو-الکترو-الاستیک [29]

$BaTiO_3$ (B)	$CoFe_2O_4$ (C)	
166.0	286.0	$C_{11}(10^9 N/m^2)$
77.00	173.0	C_{12}
43.00	45.30	C_{44}
44.50	56.50	C_{66}
11.60	0.000	$e_{12}(C/m^2)$
-4.400	0.000	e_{13}
11.60	0.093	$\epsilon_{33}(10^{-9} C^2 N/m^2)$
10.00	157.0	$\mu_{33}(10^{-6} Ns^2/C^2)$
0.000	550.0	$q_{15}(N/Am)$
0.000	580.3	q_{13}
0.000	0.000	$D_{ij}(10^{-9} Ns/VC)$
5800	5300	$\rho(Kg/m^3)$

با جای‌گذاری جواب دستگاه معادلات (۲۶) در معادلهٔ (۲۷) و ساده‌کردن آن معادلهٔ دیفرانسیل غیرخطی حرکت ورق مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک در مود اول (n=m=1) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} Z_1 W_{,tt} + Z_2 W + Z_3 W W_{,tt} + Z_4 W^2 + Z_5 W^3 \\ = Z_6 q_0 \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (۲۹)$$

در رابطهٔ فوق، Z_i $(i = 1.2.\dots.6)$ عبارت‌هایی از خواص هندسی (طول، عرض و ضخامت ورق) و مؤلفه‌های مگنتو-الکترو-الاستیک ورق هستند: $\boldsymbol{Z_1}$ و $\boldsymbol{Z_5}$ تابع چگالی و مؤلفه‌های سفتی ورق بوده و واحدشان $\frac{kg^5m^5}{s^8}$ می‌باشد، درحالی‌که، $\boldsymbol{Z_2}$، $\boldsymbol{Z_3}$ و $\boldsymbol{Z_4}$ فقط تابع مؤلفه‌های سفتی ورق بوده و واحدشان $\frac{kg^5m^5}{s^{10}}$ می‌باشد. $\boldsymbol{Z_6}$ فقط تابع مؤلفه‌های سفتی ورق است (روابط بین $\boldsymbol{Z_i}$ها با $\boldsymbol{L_i}$ و $\boldsymbol{K_i}$ در [32] آورده شده‌اند.)

با معرفی زمان بی‌بعد به‌صورت $\tau = \left(\frac{t}{a}\right)\left(\frac{C_{11Max}}{\rho_{0Max}}\right)^{\frac{1}{2}}$ [29]، که در آن t زمان، τ زمان بی‌بعد و a طول ورق $C_{11_{Max}}$ ضریب الاستیک ماده مگنتوالکتریک و $\rho_{0_{Max}}$ چگالی ماده مگنتوالکتریک هستند، معادلهٔ (۲۳) به‌صورت بی‌بعد زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} W_{,\tau\tau} + \omega_0^2 W + \alpha_1 W W_{,\tau\tau} + \alpha_2 W^2 + \alpha_3 W^3 \\ = f\cos(\Lambda\Omega\tau) \end{aligned} \quad (۳۰)$$

در رابطهٔ بالا، $f = \frac{q_0 Z_6}{Z_1}\Lambda^2$ دامنهٔ نیروی بی‌بعد، $\omega_0 = (Z_2/Z_1)^{\frac{1}{2}}$ فرکانس طبیعی خطی و Λ برابر $a\left(\frac{\rho_{0Max}}{C_{11Max}}\right)^{\frac{1}{2}}$ است. $\alpha_2 = \Lambda^2 Z_3/Z_1$، $\alpha_3 = \Lambda^2 Z_5/Z_1$ و ضریب جملهٔ سفتی غیرخطی است که فقط شامل مؤلفه‌های ماتریس‌های سفتی می‌باشد و $\alpha_1 = Z_3/Z_1$ ضرایب جملات اینرسی غیرخطی می‌باشند که علاوه‌بر مؤلفه‌های سفتی، شامل ترم‌های چگالی نیز هست.

صحه‌گذاری مدل

جدول‌های (۵-۲) فرکانس‌های خطی بی‌بعد $\omega_0 = (Z_1/Z_2)^{\frac{1}{2}}$ ورق ایزوتروپ، پیزوالکتریک و پیزومغناطیس برای $a = b = 1m$ و $h = 0.3m$ آورده شده است (در جدول ۱ خواص مواد سازنده ورق آمده است). از مقایسهٔ نتایج این تحقیق و نتایج HSDT مشخص می‌شود که نتایج به‌دست‌آمده در این تحقیق مطابقت خوبی با نتایج ذکر شده دارند و اختلاف

ناچیزی بین نتایج تحقیق حاضر و نتایج مرجع [30] موجود است. دلیل این اختلاف، صرف‌نظر کردن از ترم‌های اینرسی دورانی و صفحه‌ای می‌باشد.

جدول ۲ مقایسهٔ فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد $\omega = \omega_0 a\sqrt{\rho_{0_{max}}/C_{11_{max}}}$ ورق همسانگرد مربعی‌شکل با خواص مؤثر الاستیک فاز B

روش حل	(m,n)			
	(1,1)	(1,2)	(2,2)	(3,1)
تحقیق حاضر	2.397	4.559	6.226	7.160
HSDT [30]	2.399	4.683	6.561	6.895

جدول ۳ مقایسهٔ فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد $\omega = \omega_0 a\sqrt{\rho_{0_{max}}/C_{11_{max}}}$ ورق همسانگرد مربعی‌شکل با خواص مؤثر الاستیک فاز C

روش حل	(m,n)			
	(1,1)	(1,2)	(2,2)	(3,1)
تحقیق حاضر	2.072	3.884	5.215	5.690
HSDT [30]	2.065	3.834	5.196	6.009

جدول ٤ مقایسهٔ فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد $\omega = \omega_0 a\sqrt{\rho_{0_{max}}/C_{11_{max}}}$ ورق همسانگرد الکترو-الاستیک مربعی‌شکل

روش حل	(m,n)			
	(1,1)	(1,2)	(2,2)	(3,1)
تحقیق حاضر	2.323	4.568	6.235	7.178
HSDT [30]	2.404	4.639	6.505	6.916

جدول ۵ مقایسهٔ فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد $\omega = \omega_0 a\sqrt{\rho_{0_{max}}/C_{11_{max}}}$ ورق همسانگرد مگنتو-الاستیک مربعی‌شکل

روش حل	(m,n)			
	(1,1)	(1,2)	(2,2)	(3,1)
تحقیق حاضر	2.760	3.892	5.220	5.974
HSDT [30]	2.667	3.836	5.198	6.011

تحلیل ارتعاشات اجباری ورق

با استفاده از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه و معرفی پارامتر دیتیونینگ (Detuning Parameter) σ به‌عنوان کمیتی برای انحراف از فرکانس خطی ω_0 و فرکانس تحریک Ω [31]، ارتعاشات اجباری در تشدید اولیه و تشدید ثانویه تحلیل می‌شود.

جواب تقریبی W با استفاده از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه به‌صورت زیر می‌باشد [31]:

$$W(\tau;\varepsilon) = W_0(T_0,T_1,T_2) + \varepsilon W_1(T_0,T_1,T_2) + \varepsilon^2 W_2(T_0,T_1,T_2) \quad (۳۱)$$

که در آن:

$$T_n = \varepsilon^n \tau \qquad (n = 0,1,2,\dots) \quad (۳۲)$$

چون بسط تا مرتبهٔ سه یعنی $O(\varepsilon^3)$ انجام می‌گیرد، فقط T_0، T_1 و T_2 موردنیاز خواهند بود. مشتقات نسبت به τ برحسب مشتقات جزئی T_n به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{d}{d\tau} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2$$
$$\frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2(D_1^2 + 2D_0 D_2) \quad (۳۳)$$

تشدید اولیه. در این حالت فرکانس تحریک که به‌صورت تک فرکانسی (Mono-Frequency) Ω است نزدیک فرکانس طبیعی خطی ورق ω_0 در نظر گرفته می‌شود.

$$\Omega = \omega_0 + \varepsilon^2\sigma \quad (۳٤)$$

با استفاده از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه و جای‌گذاری معادلات (۳۱ و۳۳) در معادلهٔ حرکت غیرخطی (۳۰) و مساوی صفر قرار دادن ضرایب ε^0، ε^1 و ε^2 در معادلهٔ حاصل، معادلات آتی به‌دست می‌آیند:

$$D_0^2W_0+\omega_0^2W_0=0 \qquad (۳۵)$$

$$D_0^2W_1+\omega_0^2W_1=-2D_0D_1W_0-\alpha_2W_0^2 -\alpha_1W_0\left(D_0^2W_0\right) \qquad (۳۶)$$

$$\begin{aligned} D_0^2W_2+\omega_0^2W_2 = & \\ & -D_1^2W_0-2D_0D_2W_0-2D_0D_1W_1 \\ & -\alpha_1W_0D_0^2W_1-\alpha_1W_1D_0^2W_0-2\alpha_1W_0D_0D_1W_0 \\ & -2\alpha_2W_0W_1-\alpha_3W_0^3+Q\cos\left(\omega_0T_0+\sigma\Lambda T_2\right) \end{aligned} \qquad (۳۷)$$

با حل معادلهٔ (۳۵) و قرار دادن نتیجه در معادلهٔ (۳۶) و برابر صفر قراردادن جملات منفرد داریم:

$$D_1A=0\rightarrow A=A(T_2) \qquad (۳۸)$$

جواب معادلهٔ (۳۶) به‌صورت زیر است:

$$D_0^2W_1+\omega^2W_1=-2i\omega D_1A\exp\left(i\omega T_0\right) +\left(\omega^2\alpha_1-\alpha_2\right)\left[A^2\exp\left(2i\omega T_0\right)+2A\bar{A}\right]+cc \qquad (۳۹)$$

اگر جواب معادلات (۳۵ و ۳۶) با در نظر گرفتن شرط حل‌پذیری (۳۸) در معادلهٔ (۳۷) جای‌گذاری شود، معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

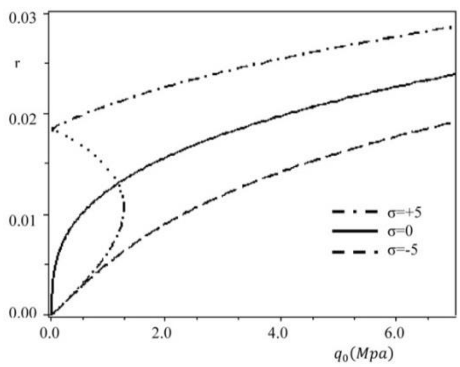
$$\begin{aligned} D_0^2W_2+\omega_0^2W_2 = & \Big[-2i\omega_0D_2A+\frac{1}{2}Q\exp\left(i\sigma\Lambda T_2\right) \\ & +\left(\frac{10}{3}\frac{\alpha_2^2}{\omega_0^2}-\frac{11}{3}\alpha_1\alpha_2+\frac{1}{3}\omega_0^2\alpha_1^2\right)\bar{A}A^2-3\alpha_3\Big] \\ & \exp\left(i\omega_0T_0\right)+NST+cc \end{aligned} \qquad (۴۰)$$

در معادلهٔ (۴۰) cc معرف جملات مختلط مزدوج است. با برابر صفر قرار دادن جملات منفرد معادلهٔ (۴۰) و $A(T_2)=\frac{1}{2}r(T_2)\exp\left(i\beta(T_2)\right)$ و جدا کردن قسمت حقیقی و موهومی عبارت حاصل از هم معادلهٔ پاسخ فرکانسی با حذف $\sin(\gamma)$ و $\cos(\gamma)$ از پاسخ حالت پایا در حالت تشدید اولیه به‌صورت زیر ارائه می‌گردد:

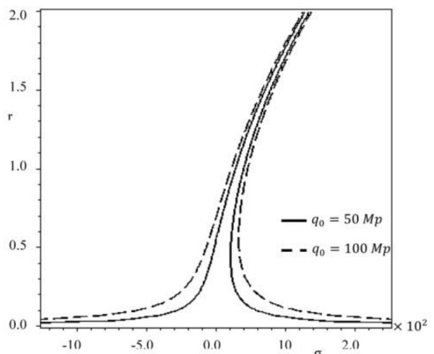
$$\left[\frac{9\alpha_3\omega_0^2-10\alpha_2^2+11\alpha_1\alpha_2\omega_0^2-\alpha_1^2\omega_0^4}{24\omega_0^2}r^2-\Lambda\sigma\right]^2r^2=\frac{Q^2}{4\omega_0^2} \qquad (۴۱)$$

شکل (۵) تغییرات دامنهٔ پاسخ نسبت به دامنهٔ تحریک به‌ازای چند مقدار پارامتر دیتیونینگ را نشان می‌دهد. این منحنی به‌طور مستقیم از معادلهٔ (۳۴) به‌دست می‌آید و برای مقادیر قرینهٔ پارامتر دیتیونینگ منحنی‌ها در ابتدا بر هم مماس هستند. باید توجه داشت که در این نمودار به‌ازای برخی از پارامترهای دیتیونینگ تعدادی از منحنی‌ها چندمقداری هستند و پدیدهٔ جهش در برخی از این منحنی‌ها اتفاق می‌افتد درحالی‌که برای تعدادی دیگر از منحنی‌ها این حالت اتفاق نمی‌افتد.

در شکل (۶) منحنی پاسخ-فرکانسی به‌ازای دو دامنهٔ تحریک مختلف نشان داده شده است. وقتی دامنهٔ تحریک افزایش می‌یابد منحنی پاسخ-فرکانسی از محور σ=0 دور می‌شود و به‌سمت بالا انتقال می‌یابد.



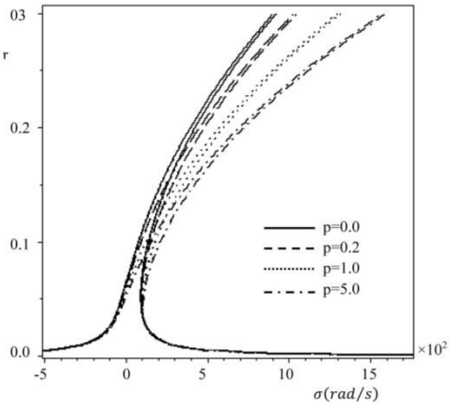
شکل ۵ منحنی دامنه-پاسخ به‌عنوان تابعی از دامنهٔ تحریک به‌ازای چندمقدار پارامتر دیتیونینگ σ



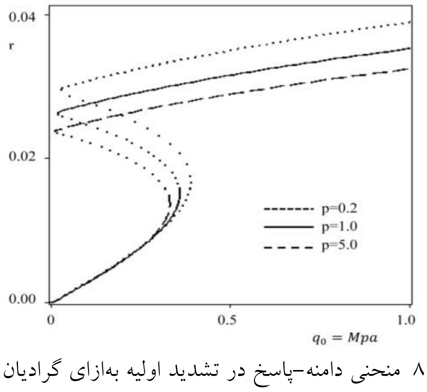
شکل ٦ منحنی پاسخ-فرکانسی در تشدید اولیه به‌ازای دو دامنهٔ تحریک مختلف

در شکل (۷) منحنی پاسخ فرکانسی چهار ورق مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک مربعی‌شکل با تغییر خواص مؤثر ورق در اثر تغییر گرادیان p (جنس‌های مختلف) تحت تحریک $q_0 = 10\,MPa$ نشان داده شده است. برای ورق مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک مشاهده می‌شود که با تغییر گرادیان p و تغییر تدریجی خواص مؤثر ورق از فاز B به فاز C، منحنی‌های پاسخ فرکانسی به‌سمت راست منحرف می‌شوند و میزان سخت‌شوندگی سیستم افزایش می‌یابد.

شکل (۸) منحنی دامنه-پاسخ را برای σ برابر ۱۰ نشان می‌دهد. در این شکل مشاهده می‌شود با تغییر گرادیان مواد، محدودهٔ چندمقداری کاهش می‌یابد و میزان افزایش دامنهٔ حرکت پس از پدیدهٔ پرش، برای گرادیان‌های کوچک‌تر بیشتر است.

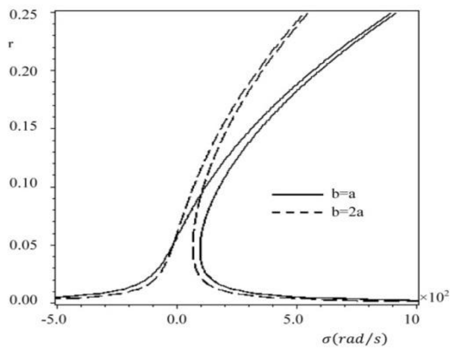


شکل ۷ منحنی پاسخ-فرکانسی در تشدید اولیه به‌ازای گرادیان (p) مختلف از خواص مؤثر ورق مدرج تابعی

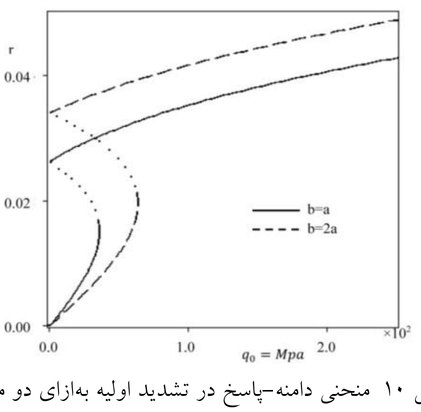


شکل ۸ منحنی دامنه-پاسخ در تشدید اولیه به‌ازای گرادیان (p) مختلف از خواص مؤثر ورق مدرج تابعی

شکل‌های (۹ و ۱۰) به‌ترتیب منحنی پاسخ فرکانسی و دامنهٔ پاسخ ورق مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک برای گرایان مواد p=۱ و دو نسبت متفاوت طول به عرض و به‌ازای σ برابر ۱۰ رادیان بر ثانیه را نشان می‌دهند. مشاهده می‌شود منحنی پاسخ فرکانسی در شکل (۹) به‌ازای نسبت طول به عرض کوچکتر به سمت راست منحرف می‌شوند و درنتیجه با کاهش این نسبت سخت‌شوندگی سیستم افزایش می‌یابد و با افزایش آن منحنی پاسخ فرکانسی به‌سمت چپ متمایل می‌شود و درنتیجه سفتی سیستم کاهش می‌یابد و با توجه به شکل (۱۰) با کاهش نسبت a/b ناحیهٔ چندمقداری بزرگ‌تر است و پدیدهٔ پرش، در محدودهٔ دامنهٔ تحریک بیشتری می‌تواند اتفاق بیافتد. به‌عبارت دیگر، به‌ازای دامنهٔ تحریک یکسان، دامنهٔ حرکت در ورقی که نسبت طول به عرض کوچکتری دارد، بیشتر می‌باشد.



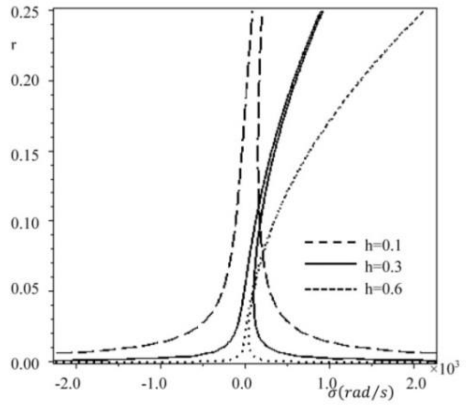
شکل ۹ منحنی پاسخ-فرکانسی در تشدید اولیه به‌ازای دو مقدار مختلف عرض (b) ورق، p=1



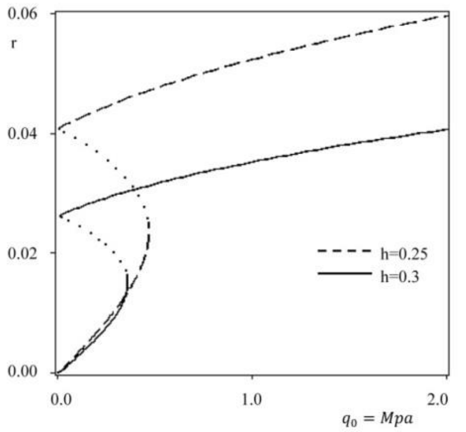
شکل ۱۰ منحنی دامنه-پاسخ در تشدید اولیه به‌ازای دو مقدار مختلف عرض (b) ورق، p=1

شکل (۱۱ و ۱۲) به‌ترتیب منحنی پاسخ فرکانسی و دامنهٔ پاسخ ورق مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک برای گرایان مواد p=۱ و دو نسبت متفاوت طول به عرض و به‌ازای σ برابر ۱۰ رادیان بر ثانیه را نشان می‌دهند. مشاهده می‌شود منحنی پاسخ فرکانسی در شکل (۱۱) به‌ازای ضخامت‌های کوچکتر به‌سمت چپ منحرف می‌شود و درنتیجه با کاهش ضخامت ورق سخت‌شوندگی سیستم کاهش می‌یابد و با افزایش آن منحنی پاسخ فرکانسی به سمت راست متمایل می‌شود و درنتیجه سفتی سیستم افزایش می‌یابد. با توجه به شکل (۱۲) با کاهش ضخامت ورق ناحیهٔ چندمقداری بزرگ‌تر می‌شود و پدیدهٔ پرش، در محدودهٔ دامنهٔ تحریک بیشتری می‌تواند اتفاق بیافتد. به‌عبارت دیگر، به‌ازای دامنهٔ تحریک یکسان، دامنهٔ حرکت در ورقی که ضخامت (h) کمتری دارد، بیشتر می‌باشد.

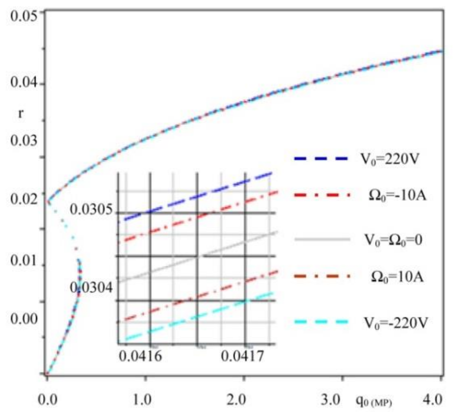
با توجه به منحنی‌های دامنهٔ پاسخ در شکل (۱۳ و ۱٤) که برای σ=۱۰ و به‌ترتیب برای گرادیان مواد مؤثر p=1 و p=20 رسم شده‌اند، مشاهده می‌شود که در منحنی‌های دامنه-پاسخ پتانسیل الکتریکی مثبت و مغناطیسی منفی باعث افزایش دامنهٔ بیشینه و محدود چندمقداری می‌شوند و نیز پتانسیل الکتریکی منفی و مغناطیسی مثبت باعث کاهش دامنهٔ بیشینه و محدود چندمقداری می‌شود. مقدار این افزایش یا کاهش در دامنهٔ بیشینه و محدود چندمقداری بسته به این که گرادیان مؤثر مواد کلی ورق بیشتر به‌سمت خواص مؤثر فاز B یا فاز C باشد متفاوت است، به‌طوری‌که اگر گرادیان مواد مؤثر ورق به‌سمت فاز B باشد (گرادیان‌های پایین p=1)، پتانسیل الکتریکی رفتار حرکتی و ارتعاشی ورق راتعیین می‌کند و تأثیر بیشتری دارد و ورق از پتانسیل مغناطیسی نسبت به پتانسیل الکتریکی تأثیر کمی می‌پذیرد. اگر گرادیان مواد مؤثر ورق به سمت فاز C باشد (گرادیان‌های بالا p=20)، پتانسیل مغناطیسی رفتار ارتعاشی ورق را معین می‌کند و ورق بیشترین تأثیر را از پتانسیل مغناطیسی می‌پذیرد.



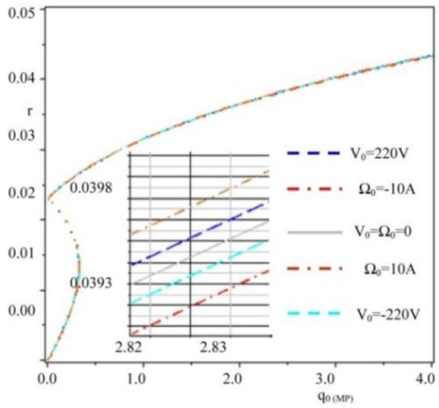
شکل ۱۱ منحنی پاسخ-فرکانسی در تشدید اولیه به‌ازای چند ضخامت مختلف ورق، p=1



شکل ۱۲ منحنی دامنه-پاسخ در تشدید اولیه به‌ازای چند مقدار مختلف ضخامت ورق، p=1.0



شکل ۱۳ تأثیر پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی مثبت و منفی در منحنی دامنه-پاسخ در تشدید اولیه p=1



شکل ١٤ تأثیر پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی مثبت و منفی در منحنی دامنه-پاسخ در تشدید اولیه، p=20

نتیجه‌گیری

در این مقاله ارتعاشات اجباری غیرخطی ورق‌های هوشمند مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک مستطیلی‌شکل با شرط تکیه‌گاهی ساده و بااستفاده از تئوری برشی مرتبه سوم، قوانین گاوس برای حالت‌های الکترواستاتیک و مگنتواستاتیک و روش مقیاس‌های زمانی چندگانه به‌منظور دست‌یابی به معادلهٔ حرکت غیرخطی و پاسخ فرکانسی تحلیلی در حالت پایا برای تشدید اولیه مدل شد و اثر پارامترهای مختلف، از جمله تغییر پارامترهای هندسی و خواص مؤثر ورق مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک، بارگذاری الکتریکی و مغناطیسی و تغییر در اندازه و شدت نیروی دامنه نیروی تحریک و پارامتر دیتیونینگ بر رفتار ارتعاشات اجباری غیرخطی ورق‌های هوشمند مدرج تابعی مگنتو-الکترو-الاستیک در منحنی‌های دامنه-پاسخ و پاسخ-فرکانسی بررسی شد. درنتیجه با توجه به پارامترهای مؤثر در ارتعاشات اجباری غیرخطی این نوع از مواد هوشمند مدرج تابعی و با به‌کار بردن آن در ساختار سازه‌های هوشمند می‌توان با تغییر نسبت ضخامت کل به طول کل و عرض کل به طول کل یا تغییر خواص مؤثر مواد مدرج تابعی و یا تحریک بارگذاری الکتریکی و مغناطیسی با شدت و جهت مناسب و تغییر در مقدار پارامتر دیتیونینگ، ارتعاشات دلخواه را در این نوع از سازه‌های هوشمند ایجاد کرد و یا اثر ارتعاشات نامطلوب را میرا و کنترل نمود و دامنهٔ ارتعاشات را کنترل کرد.

فهرست علائم

a و b	به‌ترتیب، طول و عرض ورق
h	ضخامت
r	دامنهٔ ارتعاش در تشدید اولیه
A	مساحت ورق
d_{ij}	مؤلفه‌های ضریب کوپلینگ مگنتو-الکتریک
e_{ij}	مؤلفه‌های ضریب پیزوالکتریک
q_{ij}	مؤلفه‌های ضریب پیزومگنت
q_0	دامنهٔ نیروی تحریک
u_0، v_0 و w_0	تغییرمکان‌های یک نقطه از ورق در صفحهٔ $\mathbf{z=0}$
A_{ij}	سفتی‌های کششی
B_i	مؤلفه‌های شار مغناطیسی
B_{ij}	سفتی‌های کوپلینگ خمشی-کششی
C_{ij}	مؤلفه‌های ماتریس سفتی
D_i	مؤلفه‌های جابه‌جایی الکتریکی
D_{ij}	سفتی‌های خمشی
E_i	مؤلفه‌های میدان الکتریکی
H_i	مؤلفه‌های میدان مغناطیسی
H_{ij}	سفتی‌های مرتبه بالای از ضخامت
I_0، I_1، I_3 ، I_4 و I_6	ممان‌های اینرسی جرمی
E_{ij}و F_{ij}	سفتی‌های مرتبه بالای از ضخامت
M_x، M_y و M_{xy}	منتجه‌های ممان

N_{xx} ،N_{yy} وN_{xy}	منتجه‌های نیروی صفحه‌ای
P_{xx} ،P_{yy} و P_{xy} و R_x ، R_y	منتجه‌های تنش مرتبه بالاتر
Q_x و Q_y	منتجه‌های نیروی عرضی

علائم یونانی

γ	فاز حرکت در حرکت حالت پایدار
ε	پارامتر مثبت بی‌بعد و کوچک
σ	پارامتر دیتیونینگ
τ	زمان بی‌بعد
ω	فرکانس طبیعی خطی بی‌بعد
Ω	فرکانس تحریک
γ_{ij}	کرنش برشی
ε_i	مؤلفه‌های کرنش
μ_{ij}	مؤلفه‌های تراوایی (نفوذپذیری) مغناطیسی
ρ_0	چگالی ماده ورق
σ_i	مؤلفه‌های تنش
ϕ_x و ϕ_y	چرخش‌های نرمال عرضی، به‌ترتیب، حول محورهای x و y
ϵ_{ij}	مؤلفه‌های دی‌الکتریک
ω_0	فرکانس دورانی خطی

بالا نویس

ela	ترم‌های متناظر مؤلفه‌های الاستیک
me	ترم‌های متناظر مؤلفه‌های مگنتو-الکتریک

واژه‌نامه

پدیدهٔ پرش	Jump phenomena
تشدید اولیه	Primary resonance
تشدید ثانویه	Secondary resonance
تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم	Third order shear deformation theory
منحنی پاسخ فرکانسی	Frequency response function
مواد مدرج تابعی	Functionally Graded Material (FGM)
ناحیهٔ چندمقداری	Multivalued region

مراجع

1. Ferreira, A., Batra, R., Roque, C., Qian, L. and Jorge, R., "Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method", *Composite Structures*, Vol. 75, No. 1, pp. 593-600 (2006).
2. Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M. and Atashipour, S.R., "A new exact analytical approach for free vibration of Reissner–Mindlin functionally graded rectangular plates", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 53, No. 1, pp. 11-22 (2011).
3. Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M. and Atashipour, S.R., "Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closed-form procedure", *Composite Structures*, Vol. 93, No. 2, pp. 722-735 (2011).
4. Allahverdizadeh, A., Oftadeh, R.,Mahjoob, M. and Naei, M., "Homotopy perturbation solution and periodicity analysis of nonlinear vibration of thin rectangular functionally graded plates", *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 27, No. 2, pp. 210-220 (2014).
5. Malekzadeh, P. and Alibeygi Beni, A., "Nonlinear Free Vibration of In-Plane Functionally Graded Rectangular Plates", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 22, No. 8, pp. 633-640, (2015).

6. Duc, N.D., Cong, P.H., Tuan, N.D., Tran, P., Anh, V.M. and Quang V.D., "Nonlinear vibration and dynamic response of imperfect eccentrically stiffened shear deformable sandwich plate with functionally graded material in thermal environment", *Journal of Sandwich Structures and Materials*, pp. 1099636215602142, (2015).
7. Reddy, J.N., "On laminated composite plates with integrated sensors and actuators", *Engineering Structures*, Vol. 21, No. 7, pp. 568-593 (1999).
8. Liew, K., Yang, J. and Kitipornchai S., "Postbuckling of piezoelectric FGM plates subject to thermo-electro-mechanical loading", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, No. 15, pp. 3869-3892, (2003).
9. Cupiał, P., "Three-dimensional natural vibration analysis and energy considerations for a piezoelectric rectangular plate", *Journal of sound and vibration*, Vol. 283, No. 3, pp. 1093-1113, (2005).
10. Shen, H.-S., "Postbuckling of axially loaded FGM hybrid cylindrical shells in thermal environments", *Composites science and technology*, Vol. 65, No. 11, pp. 1675-1690, (2005).
11. Chen, X., Zhao, Z. and Liew, K.M., "Stability of piezoelectric FGM rectangular plates subjected to non-uniformly distributed load, heat and voltage", *Advances in Engineering software*, Vol. 39, No. 2, pp. 121-131, (2008).
12. Fakhari, V.,Ohadi, A. and Yousefian, P., "Nonlinear free and forced vibration behavior of functionally graded plate with piezoelectric layers in thermal environment", *Composite Structures*, Vol. 93, No. 9, pp. 2310-2321, (2011).
13. Kumar, A. and Panda S., "Chakraborty D., Piezo-viscoelastically damped nonlinear frequency response of functionally graded plates with a heated plate-surface", *Journal of Vibration and Control*, pp. 1077546314532672, (2014).
14. Kumar, A., Panda, S. and Chakraborty, D., "Harmonically exited nonlinear vibration of heated functionally graded plates integrated with piezoelectric composite actuator", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 26, No. 8, pp. 931-951, (2015).
15. Shen, H.-S., "Nonlinear bending analysis of unsymmetric cross-ply laminated plates with piezoelectric actuators in thermal environments", *Composite Structures*, Vol. 63, No. 2, pp. 167-177 (2004).
16. Huang, X.-L. and Shen, H.-S., "Nonlinear free and forced vibration of simply supported shear deformable laminated plates with piezoelectric actuators", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 47, No. 2, pp. 187-208, (2005).
17. Shen, H.S., "Nonlinear thermal bending response of FGM plates due to heat conduction", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 38, No. 2, pp. 201-215, (2007).
18. Pan, E., "Exact solution for simply supported and multilayered magneto-electro-elastic plates", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 68, No. 4, pp. 608-618, (2001).
19. Chang, T.P., "Deterministic and random vibration analysis of fluid-contacting transversely isotropic magneto-electro-elastic plates", *Computers & Fluids*, Vol. 84, pp. 247-254, (2013).
20. Lang, Z. and Xuewu, L., "Buckling and vibration analysis of functionally graded magneto-electro-thermo-elastic circular cylindrical shells", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 4, pp. 2279-2292, (2013).

21. Chen, J., Heyliger, P. and Pan, E., "Free vibration of three-dimensional multilayered magneto-electro-elastic plates under combined clamped/free boundary conditions", *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 333, No. 17, pp. 4017-4029, (2014).
22. Li, Y. and Zhang, J., "Free vibration analysis of magnetoelectroelastic plate resting on a Pasternak foundation", *Smart Materials and Structures*, Vol. 23, No. 2, pp. 025002, (2013).
23. Razavi, S. and Shooshtari, A., "Free vibration analysis of a magneto-electro-elastic doubly-curved shell resting on a Pasternak-type elastic foundation", *Smart Materials and Structures*, Vol. 23, No. 10, pp. 105003, (2014).
24. Ansari, R., Gholami, R. and Rouhi, H., "Size-dependent nonlinear forced vibration analysis of magneto-electro-thermo-elastic Timoshenko nanobeams based upon the nonlocal elasticity theory", *Composite Structures*, Vol. 126, pp. 216-226, (2015).
25. Ansari, R., Hasrati, E., Gholami, R. and Sadeghi, F., "Nonlinear analysis of forced vibration of nonlocal third-order shear deformable beam model of magneto–electro–thermo elastic nanobeams", *Composites Part B: Engineering,* Vol. 83, pp. 226-241, (2015).
26. Bhangale, R.K. and Ganesan, N., "Free vibration of simply supported functionally graded and layered magneto-electro-elastic plates by finite element method", *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 294, No. 4, pp. 1016-1038, (2006).
27. Li, J.Y., "Magnetoelectroelastic multi-inclusion and inhomogeneity problems and their applications in composite materials", *International Journal of Engineering Science,* Vol. 38, No. 18, pp. 1993-2011, (2000).
28. Reddy, J.N., *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*: CRC press, (2004).
29. Pan, E. and Han, F., "Exact solution for functionally graded and layered magneto-electro-elastic plates", *International Journal of Engineering Science,* Vol. 43, No. 3, pp. 321-339, (2005).
30. Moita, J.M.S., Soares, C.M.M. and Soares, C.A.M., "Analyses of magneto-electro-elastic plates using a higher order finite element model", *Composite structures,* Vol. 91, No. 4, pp. 421-426, (2009).
31. Nayfeh A.H. and Mook D.T., "*Nonlinear oscillations*", John Wiley & Sons, (2008).
32. Mantashloo R. and Shooshtari A. , "Nonlinear Transverse Vibration of FGM Magneto-elctro elastic rectangular plates based on third order shear deformation theory", M. Sc. Thesis, Bu-Ali Sina University, (2015).

پیوست

$$e(z) = \int_{-h/2}^{+h/2} e_{15}(z)\left(\frac{3c_1z^2-1}{c_1}\right)dz$$
$$q(z) = \int_{-h/2}^{+h/2} q_{15}(z)\left(\frac{3c_1z^2-1}{c_1}\right)dz$$

(الف–۱)

$$\Phi_0 = \frac{1}{h}\left(V_0 - \left(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}\right)V_1 - \left(\varepsilon_{xx}^{(3)}+\varepsilon_{yy}^{(3)}\right)V_2\right)$$
$$\Psi_0 = \frac{1}{h}\left(\Omega_0 - \left(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}\right)\Omega_2 - \left(\varepsilon_{xx}^{(3)}+\varepsilon_{yy}^{(3)}\right)\Omega_1\right)$$

(الف–۲)

$$\Omega_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{q_{31}(z)}{\mu_{33}(z)}dz\,, \Omega_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{q(z)}{\mu_{33}(z)}dz$$

(الف–۳)

$$V_1 = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{e_{31}(z)}{\epsilon_{33}\,(z)}dz\,, V_2 = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{e(z)}{\epsilon_{33}\,(z)}dz$$

(الف–٤)